УДК 512.544

К. С. Мордак
Дніпропетровський національний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ІСНУВАННЯ НЕЗВІДНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СКІНЧЕННИХ ГРУП ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ GAP

Розглянуто критерій існування точних незвідних зображень скінченних груп та побудовано алгоритм, що дозволяє перевіряти його за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP.

Нехай G – група, підгрупа Soc(G) групи G, яка породжена всіма її мінімальними нормальними підгрупами, називається цоколем групи G (якщо група G не містить мінімальних нормальних підгруп, то Soc(G) = 1). Аналогічно абелевим цоколем abSoc(G) групи G називається підгрупа, яка породжена всіма абелевими мінімальними нормальними підгрупами G, якщо G містить такі підгрупи. У протилежному випадку abSoc(G) = 1 [1]. У [2] Гашюц показав, що скінченна група G має точне незвідне зображення над полем нульової характеристики тоді і тільки тоді, коли Soc(G) породжується одним класом спряжених елементів. У [3] показано, що скінченна група G має точне незвідне зображення над полем F характеристики p тоді і тільки тоді, коли abSoc(G) породжується одним класом спряжених елементів і, якщо $\mathrm{char}\, F = p \neq 0$, то $p \notin \pi(\mathrm{abSoc}(G))$. У зв'язку з цими результатами постає питання про отримання переліку скінченних груп, для яких abSoc(G) породжується одним класом спряжених елементів. Зауважимо, що абелевий цоколь abSoc(G) групи G співпадає з центром цоколя Soc(G). Дійсно, з наслідків 1 і 2 леми 5.23 з [1] випливає, що $\mathrm{Soc}(G) = \mathrm{abSoc}(G) \times S$, де S – прямий добуток скінченних неабелевих простих підгруп. Центр прямого добутку співпадає з прямим добутком центрів множників, тоді $Z(\mathrm{Soc}(G)) = \mathrm{abSoc}(G)$, оскільки $Z(S) = 1$.

Для пошуку таких груп використана система комп'ютерної алгебри GAP [4], назва якої означає «Групи, алгоритми та програмування», Спочатку вона була розроблена для комбінаторної теорії груп, а з часом розповсюджена і на інші розділи алгебри. Одним з головних компонентів системи GAP є спеціальна мова програмування, яка дозволяє створювати власні програми та розширювати систему.

У GAP можна працювати з різними групами, наприклад, групами підстановок, матричними групами, групами, які задані породжуючими елементами та визначаючими співвідношеннями. Серед функцій для роботи з групами – визначення порядку групи, класів спряжених елементів, центру і комутанту групи, силовських підгруп, нормальних підгруп та ін.

Для розв'язання поставленої задачі була складена програма, яка містить функцію *funk*, що залежить від перевіряемої групи G та характеристики p поля F. Групу G можна задавати підстановками або викликати з деякого каталогу

© К. С. Мордак, 2007

(наприклад, з бібліотеки скінченних груп). Результат роботи програми записується у файл «rezult.txt».

Алгоритм програми: 1. побудова цоколя Soc заданої групи G; 2. пошук центра цоколя Soc, який співпадає з абелевим цоколем abSoc; 3. побудова класу спряжених елементів C для кожного елементу з abSoc та за допомогою елементів з C породження групи H; 4. перевірка, чи співпадає abSoc з H; 5, якщо $p \neq 0$, то p не ділить порядки елементів групи G; 6. якщо умови 4, 5 виконуються, то повертається значення true, у протилежному випадку – false.

Текст програми наведений нижче:

```
funk:=function(G, p)
local   flag1, flag,    # індикатори виконання умов
g,                      # елемент групи G
Soc,                    # цоколь групи G
abSoc,                  # абелевий цоколь групиG
C,                      # клас спряжених елементів
H,                      # поточна група, яка породжується елементами з C
x;                      # елемент abSoc
LogTo("rezult.txt");
Soc:=Socle(G);
abSoc:=Centre(Soc);
flag1:=false;
for x in abSoc do
C:=ConjugacyClass(G,x);
H:=GroupWithGenerators(Elements(C));
if H=abSoc then flag1:=true; break; fi; od;
flag:=true;
if flag1=false then flag:=flag1;
else if p<>0 then
for g in G do if RemInt(Order(g),p)=0 then flag:=false; break; fi; od;
else flag:=flag1; fi; fi;
Print(flag,"\n")
LogTo();end;
```

Бібліографічні посилання

1. **Тушев А. В.** О точных неприводимых представлениях локально нормальных групп// Укр. мат. журн. – 1993. – 45, №12. – С. 1688 – 1694.
2. **Gaschutz W.** Endliche Gruppen mittreuen absolutirreduziblen Darstellungen // Math. Nachr. – 1954. V. 12, № 3/4. – P. 253 – 255.
3. **Robinson D.J.S.** Finiteness conditions and generalized soluble groups. – Berlin. 1972. – 464p.
4. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming. – Aachen. – 1999. (http://www.gap-system.org).

Надійшла до редколегії 10.04.07